

ционально. К сожалению, эта картина существует и поныне, т.к. с 1991 г. после расформирования ВНИИЭТО, а впоследствии – и СКБ НЗЭТО работы по проектированию новых печей, исследованию напряженно-деформированного состояния их металлоконструкций в странах СНГ не ведутся.

Поэтому в настоящее же время при выполнении проектов дуговых сталеплавильных печей и, в частности, при проектировании механизмов наклона следует серьезное внимание уделить вопросам создания оптимальной в отношении прочности и металлоемкости конструкции люльки, используя для этого современные конечно-элементные программные комплексы.

**Список литературы:** 1. *Толоконников Л.С.* Расчет и конструирование механизмов электрических печей. – М. – Л.: Госэнергониздат, 1961. – 240 с. 2. *Иванченко Ф.К., Павленко Б.А.* Механическое оборудование электросталеплавильных цехов. – М.: Металлургия, 1964. – 440 с. 3. *Крамаров А.Д., Соколов А.Н.* Электросталеплавильная сталь и ферросплавы. – М.: Металлургия, 1976. – 376 с. 4. *Еднерал Ф.П.* Электросталеплавильная сталь и ферросплавы. – М.: Металлургия, 1977. – 488 с. 5. *Целиков А.И., Полухин П.И., Гребеник В.М. и др.* Машины и агрегаты металлургических заводов. Т. 2: Машины и агрегаты сталеплавильных цехов. – М.: Металлургия, 1978. – 328 с. 6. *Поволоцкий Д.Я., Роцин В.Е., Рысь М.А., Строганов А.И., Ярцев М.А.* Электросталеплавильная сталь и ферросплавы. – М.: Металлургия, 1984. – 568 с. 7. *Егоров А.В.* Электроплавильные печи черной металлургии. – М.: Металлургия, 1985. – 280 с. 8. *Огороков Н.В.* Дуговые сталеплавильные печи. – М.: Металлургия, 1985. – 344 с. 9. *Гребеник В.М., Иванченко Ф.К., Ширяев В.И.* Расчет металлургических машин и механизмов. – К.: Выща школа, 1988. – 448 с. 10. *Сойфер В.М., Кузнецов Л.Н.* Дуговые печи в сталелитейном цехе. – М.: Металлургия, 1989. – 176 с. 11. *Сапко А.И., Чернов Л.А.* Расчет механизмов наклона дуговых печей // *Сталь*, 1961. – №12. – С.1085-1087. 12. *Факторович Г.Е., Ройтенбург З.Н.* Оценка прочности люльки дуговой сталеплавильной печи // *Электротермическая промышленность. Серия «Электротермия»*, 1982. – Вып. 1 (227). – С.16-18. 13. *Электротермическая промышленность. Серия «Электротермия»*, 1982. – Вып. 1 (227). – С.16-18. 14. *Факторович Г.Е., Ройтенбург З.Н.* Рациональная конструкция опорного сектора дуговой сталеплавильной электротермической печи // *Сб. науч. тр. ВНИИЭТО*, 1991. – С.125-129. 15. *А.с. 1179075.* Устройство для наклона дуговой печи / Г.Е. Факторович, З.Н. Ройтенбург, Е.М. Пономарев // *Открытия. Изобретения*, 1985 – №34. 16. *Сморгонский В.И.* Расчет механизма наклона дуговых печей большой емкости // *Электротермическая промышленность. Серия «Электротермия»*, 1973. – Вып. 6 (130). – С.28-30.

*Поступила в редколлегию 10.03.2009*

УДК 531.8:621.747

*А.В. ГРАБОВСКИЙ*, асп. каф. ТММиСАПР, НТУ „ХПИ”

## 1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИКИ ИНЕРЦИОННЫХ ВИБРОМАШИН И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЙСТВУЮЩИХ НАГРУЗОК В ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЕ

*Представлений анализ існуючих методів дослідження динамічних характеристик інерційних машин. Запропонована багаторівнева схема методів розрахунків. Проведені дослідження вибивної машини згідно запропонованої схеми на всіх рівнях моделей динаміки. Для всіх розрахунків представлені теоретичні викладення по виведенню розв'язувальної системи рівнянь для динаміч-*

*них моделей. Проведений аналіз і верифікація отриманих результатів.*

*The analysis of existent methods of research of dynamic descriptions of inertia machines is presented. The multilevel chart of methods of calculations is offered. Researches of knock-out machine are conducted in obedience to the offered chart at all levels of models of dynamics. For all calculations theoretical letups are presented on the conclusion of the resolvent system of equations for dynamic models. The analysis and verifications of obtained results is conducted.*

**Введение.** Инерционные машины получили большое распространение. Они достаточно широко используются в современной промышленности. Область их использования достаточно широкая, начиная от таких трудоемких операций, как выбивка отливок, транспортирование грузов, обработка деталей, и заканчивая горной промышленностью.

В литературе содержится достаточно большое количество моделей для описания различных динамических процессов [1-7], наблюдаемых в инерционных машинах. Однако в этих моделях присутствует большое число упрощений, допущений и гипотез. Это не дает возможности проводить адекватное описание рабочих процессов в этих машинах. При этом на сегодняшний день отсутствует единый обобщенный подход к исследованию динамических процессов в виброударных машинах как нелинейных виброударных системах. Поэтому разработка новых подходов к решению этой задачи является актуальной и важной задачей, имеющей большое практическое значение.

Имеющиеся теоретические наработки и модели виброударных процессов, как показали попытки решения ряда важных задач исследования динамики крупнотоннажных машин, обладают очень существенными принципиальными недостатками, в первую очередь, жесткой, изначально принимаемой за основу, структурой математических моделей. Это не позволяет модифицировать эти модели применительно к моделированию широкого класса машин. В свою очередь это требует разработки новых подходов к генерированию математической модели варьируемой структуры. Кроме того, требуется создание критериевальных основ для выбора того или иного типа модели, а в пределах выбранного типа – идентификация параметров модели.

**Постановка задачи.** Исходя из особенностей поставленной в работе задачи, для моделирования сложных физико-механических процессов в вибрационных машинах предлагается использовать подход, позволяющий генерировать множество моделей, объединяющее наборы моделей по различным срезам и принципам:

- иерархический принцип: тип математической модели  $m_i$  изменяется от более простых к более сложным, сохраняя свойство преемственности и вложенности:

$$m_i \supset m_j \forall i < j, \quad m_i, m_j \in M, \quad (1) \quad \forall i \exists j > i: m_i(p_i^*) = m_j(p_j^*), \quad (2)$$

где  $p$  – набор обобщенных параметров, определяющих свойства той или иной модели  $m_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;

- разделение по срезам моделируемых процессов и состояний:

$$L(w, u) = L_w(w, u) \cdot L_u(w, u), \quad (3)$$

где  $w$ ,  $u$  – перемещения точек исследуемой механической системы как твердых и упругих тел соответственно;

- разделения по средствам численного моделирования (универсальные, специальные, специализированные, интегрированные системы).

**Обзор существующих методов исследования динамических характеристик.** Основополагающими работами по исследованию динамических характеристик инерционных виброустановок можно считать работу [1]. Для описания процесса выбивки литья в этих работах выбивная машина вместе с комом представляется двухмассовой виброударной колебательной системой.

В работе [7] поиск динамических характеристик основан на модифицированном методе для исследуемой выбивной машины. В основе математической модели заложено уравнение:

$$m_p \cdot \ddot{x}_p + b \dot{x}_p + cy_p = Dw^2 \cdot \cos v \cdot \cos(wc + y) - m_p g. \quad (4)$$

В других работах [2, 8, 9] автором предлагается математическая модель инерционной машины направленных колебаний с управляемыми вибровозбудителями. В модели исследуется рассеяние энергии на установившемся режиме, показана эффективность виброобработки на переходных режимах. Рассмотрена динамика разгона вибрационной машины в плоской постановке движения рабочего органа. Уделяется внимание возникновению эффекта Зоммерфельда.

В работе [10] автор разработал математическую модель питателя грохота, которая учитывает поведение короба под действием двух разнонаправленных сил вибраторов. Эти силы обеспечивают как направленную возбуждающую силу, так и момент, который появляется при изменении направления силы. В работе [11] освещен вопрос повышения эффективности и снижения энергоемкости вибрационного технологического оборудования в процессах переработки минерального сырья. Идея работы заключается в использовании рациональных энергетических и силовых параметров вибрационного нагружения технологических сред посредством применения нелинейного вибрационного привода, обеспечивающего их независимую регулировку.

Работа [12] посвящена решению проблемы, заключающейся в установлении закономерностей, которые объясняют и описывают влияние на кинетику вибрационного грохочения сегрегации, просеивания, вибротранспортирования, формы частиц и отверстий сита.

В работах [3, 4, 13] автор вводит математическую модель, которая учитывает различные особенности технологических процессов. В модели масса технологической нагрузки является переменной. Контакт технологической нагрузки с машиной представляется в виде односторонней упругой связи при наличии сил сухого трения, а также учитывается переменное взаимное поло-

жение точек контакта отливки с полотном решетки. Тела системы совершают плоское движение.

Однако в отмеченных выше работах не рассмотрен единый подход к исследованию виброударных систем, не описываются пространственные модели конструкций, что не совсем адекватно характеризует динамику системы.

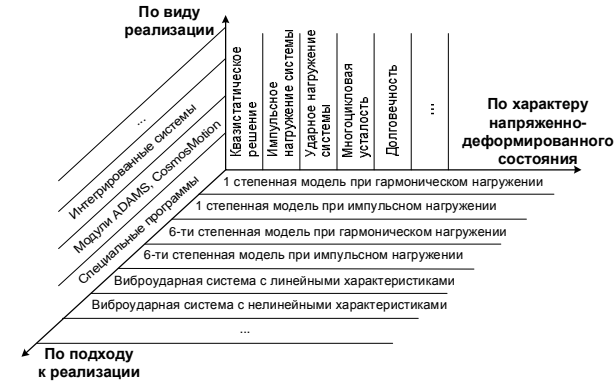


Рис. 1. Многоуровневая схема моделей для моделирования инерционной машины как вибрационной системы

моделей, которые составлены с разной степенью достоверности и упрощения при различных анализах виброударных систем. Схема является пространственной, в ней на пересечении различных типов признаков моделей получается тот или иной уровень рассмотрения детализации модели. Исследование конструкции при различных уровнях детализации необходимо при выборе тех или иных рациональных параметров, например, жесткости опор инерционной машины, вязкости песчано-глинистой смеси, из которой выбивается отливка, прочностных характеристик металлоконструкции корпуса инерционной машины и т.п.

В работе предложены новые методы и подходы для исследования динамических характеристик выбивных машин. При этом совмещаются подходы, описанные в работах других авторов [1-7]. Однако в большей мере используются методики, предложенные в работах [2, 3, 7], в которых авторы наиболее близко подошли к исследуемой проблеме.

Рассмотрим ряд математических моделей для исследования процессов в вибрационной машине (на примере крупнотоннажной выбивной инерционной машины [7]), включающий:

- модель движения машины как твердого тела с 6-ю степенями свободы: на холостом ходу, на переходных режимах и при заданном импульсном нагружении;
- линейная виброударная модель движения машины как твердого тела с одной степенью свободы;

**Общий подход к решению задачи.** В качестве одного из вариантов решения задачи в статье при исследовании инерционных машин предлагается построить многоуровневую систему моделей, представленную на рис. 1. На этой схеме показаны разные уровни математических

• нелинейная виброударная модель движения машины как твердого тела с одной степенью свободы.

**Методы и модели для исследования динамических характеристик инерционных машин.** Система с 6-ю степенями свободы при гармоническом и импульсном нагружении. Для описания процесса движения при составлении разрешающей системы уравнений предлагается в основу положить технологию составления уравнений Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} = Q_s, \quad s = (1..6), \quad (5)$$

$$q_s = \{u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z\}^T \equiv \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}^T, \quad (6)$$

где  $T$  – кинетическая энергия,  $\Pi$  – потенциальная энергия,  $q_s$  –  $s$ -я обобщенная координата,  $Q_s$  – обобщенные внешние силы,  $u, v, w, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$  – перемещения и углы поворота вдоль и относительно координатных осей.

Схема исследуемой машины представлена на рис. 2. Кинетическая энергия для такой динамической системы будет иметь следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + \dot{w}^2(t)) + \frac{1}{2} I_x \dot{\varphi}_x^2(t) + \frac{1}{2} I_y \dot{\varphi}_y^2(t) + \frac{1}{2} I_z \dot{\varphi}_z^2(t). \quad (7)$$

Что касается потенциальной энергии, то в уравнение (5) она входит как общая энергия системы через обобщенные координаты. Конструкция, приведенная на рис. 2, – пространственная. Поэтому необходимо привести составляющие энергии относительно координаты удлинения каждого упругого элемента к выражению относительно обобщенных координат.

На представленной схеме инерционная машина устанавливается на 4-х упругих опорах, поэтому при составлении общей потенциальной энергии необходимо записать виртуальные перемещения каждой пружины. Исходя из вышесказанного, виртуальные перемещения будут зависеть не только от трансляционных обобщенных координат, но и от угловых составляющих координат, умноженных на соответствующие плечи:

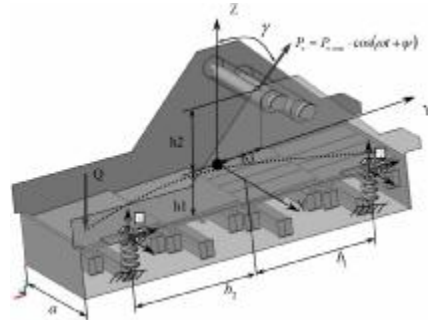


Рис. 2. Динамическая схема исследуемой

конструкции выбивной машины

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u(t) - h_1 \cdot \varphi_y(t) - b_1 \cdot \varphi_z(t); \\ u_2(t) &= u(t) - h_1 \cdot \varphi_y(t) - b_1 \cdot \varphi_z(t); \\ u_3(t) &= u(t) - h_1 \cdot \varphi_y(t) + b_2 \cdot \varphi_z(t); \\ u_4(t) &= u(t) - h_1 \cdot \varphi_y(t) + b_2 \cdot \varphi_z(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= v(t) + h_1 \cdot \varphi_x(t) - a/2 \cdot \varphi_z(t); \\ v_2(t) &= v(t) + h_1 \cdot \varphi_x(t) + a/2 \cdot \varphi_z(t); \\ v_3(t) &= v(t) + h_1 \cdot \varphi_x(t) + a/2 \cdot \varphi_z(t); \\ v_4(t) &= v(t) + h_1 \cdot \varphi_x(t) - a/2 \cdot \varphi_z(t); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} w_1(t) &= w(t) + b_1 \cdot \varphi_x(t) + a/2 \cdot \varphi_y(t); \\ w_2(t) &= w(t) + b_1 \cdot \varphi_x(t) - a/2 \cdot \varphi_y(t); \\ w_3(t) &= w(t) - b_2 \cdot \varphi_x(t) - a/2 \cdot \varphi_y(t); \\ w_4(t) &= w(t) - b_2 \cdot \varphi_x(t) + a/2 \cdot \varphi_y(t). \end{aligned}$$

С учетом выражений (8) потенциальная энергия исследуемой системы будет записана следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 C_i \cdot u_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 C_i \cdot v_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 C_i \cdot w_i^2(t). \quad (9)$$

Далее необходимо описать обобщенную внешнюю силу. Она будет состоять из двух частей, а именно из воздействия от дебалансных валов и от ударной нагрузки. Воздействие от дебалансных валов определяется достаточно точно. Методика определения такой нагрузки описывается в различных работах [1, 7]:

$$P_e = P_{e,\max} \cdot \cos(\omega t + \psi), \quad (10)$$

где

$$P_{e,\max} = D \cdot \omega^2 \cdot \cos \nu - \quad (11)$$

максимальное значение вертикальной составляющей возмущающей силы вибровозбудителя;  $D$  – дебаланс вибровозбудителя;  $\omega \approx 100 \text{ c}^{-1}$  – угловая скорость вращения дебалансных валов;  $\nu = \pi/6$  – угол между вертикалью и осью, соединяющей центры дебалансных валов.

Подставив в уравнения (9), (11) параметры значений реальной конструкции [7], получим  $D = 2 \cdot m_o \cdot e = 33.5$ ,  $P_{e,\max} = 293 \text{ кН}$ .

После определения  $T$ ,  $\Pi$  и нагрузок системы можно достаточно просто вывести систему дифференциальных уравнений, описывающих динамическое поведение исследуемой системы. Для этого необходимо подставить выражения для энергии (7, 9) в уравнение Лагранжа 2-го рода (5) и продифференцировать по обобщенным координатам (6). В результате таких операций получим следующую систему из 6-ти уравнений:

$$\begin{cases}
m\ddot{u}(t) + 4C_1 u(t) - 4C_1 h_1 \varphi_y(t) + 2C_1 (b_2 - b_1) \varphi_z(t) + 4R_1 \dot{w}(t) - 4 \cdot R_1 \cdot h_1 \cdot \dot{\varphi}_y(t) + \\
+ 2R_1 (b_2 - b_1) \dot{\varphi}_z(t) = 0; \\
m\ddot{v}(t) + 4C_2 v(t) + 4C_2 h_1 \varphi_x(t) + 4R_2 \dot{w}(t) + 4R_2 h_1 \dot{\varphi}_x(t) = D\omega^2 \cos(\gamma) \sin(\omega t) \sin(\alpha); \\
m\ddot{w}(t) + 4C_3 w(t) + 2C_3 (b_1 - b_2) \varphi_x(t) + 4R_3 \dot{u}(t) + 2R_3 (b_1 - b_2) \dot{\varphi}_x(t) = \\
= D\omega^2 \cos(\gamma) \sin(\omega t) \cos(\alpha) + F_{imp}; \\
I_1 \ddot{\varphi}_x(t) + 4C_2 h_1 v(t) + 2C_3 (b_1 - b_2) w(t) + (4C_2 h_1^2 + 2C_3 (b_1^2 + b_2^2)) \varphi_x(t) + 4R_2 h_1 \dot{w}(t) + \\
+ 2R_3 (b_1 - b_2) \dot{u}(t) + (4R_2 h_1^2 + 2R_3 (b_1^2 + b_2^2)) \dot{\varphi}_x(t) = \\
= D\omega^2 \cos(\gamma) \sin(\omega t) (b_3 \cos(\alpha) - h_2 \sin(\alpha)) - F_{imp} l_x; \\
I_2 \ddot{\varphi}_y(t) - 4C_1 h_1 u(t) + (4C_1 h_1^2 + C_3 a^2) \varphi_y(t) + 2C_1 h_1 (b_1 - b_2) \varphi_z(t) - \\
- 4R_1 h_1 \dot{w}(t) + (4R_1 h_1^2 + R_3 a^2) \dot{\varphi}_y(t) + 2R_1 h_1 (b_1 - b_2) \dot{\varphi}_z(t) = F_{imp} l_y; \\
I_3 \ddot{\varphi}_z(t) + 2C_1 (b_2 - b_1) u(t) + 2C_1 h_1 (b_1 - b_2) \varphi_y(t) + (2C_1 (b_1^2 + b_2^2) + C_2 a^2) \varphi_z(t) + \\
+ 2R_1 (b_2 - b_1) \dot{u}(t) + 2R_1 h_1 (b_1 - b_2) \dot{\varphi}_y(t) + (2R_1 (b_1^2 + b_2^2) + R_2 a^2) \dot{\varphi}_z(t) = 0.
\end{cases} \quad (12)$$

6-степенная модель при гармоническом нагружении. Приведенная выше математическая модель (12) полностью описывает холостой режим вибробивной машины. Она была проинтегрирована в среде Maple методом Рунге-Кутты. В качестве результатов исследования предлагаются графики перемещений, скоростей и ускорений различных точек во времени различных координат, перемещение в пространстве, а также фазовые портреты и траектории движения центра масс в пространстве (рис. 3-6).

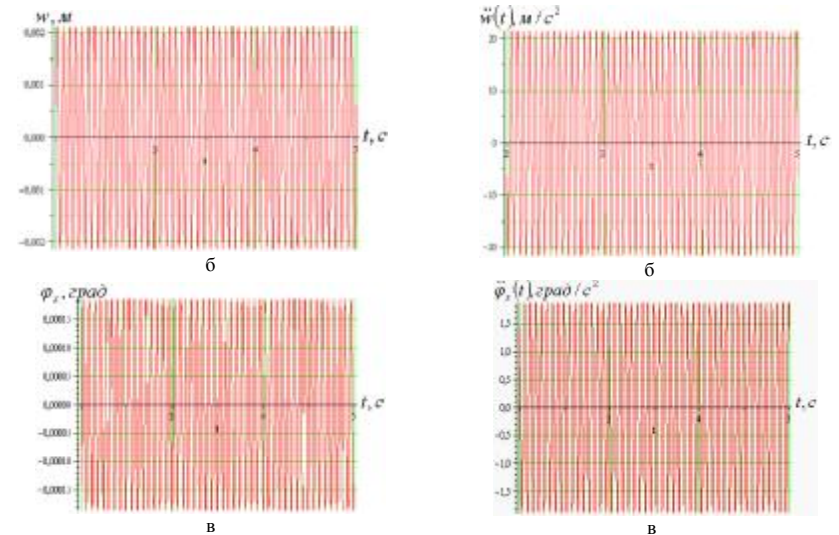
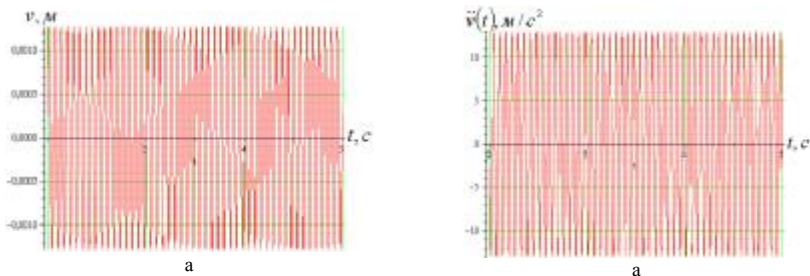


Рис. 3. Перемещения (а, б) и вращение (в) центра масс вибробивной машины в обобщенных координатах по времени: а –  $v$ , б –  $w$ , в –  $\varphi_x$

Рис. 4. Линейные (а, б) и угловые (в) ускорения центра масс вибробивной машины в обобщенных координатах по времени: а –  $\ddot{u}(t)$ , б –  $\ddot{w}(t)$ , в –  $\ddot{\varphi}_x(t)$

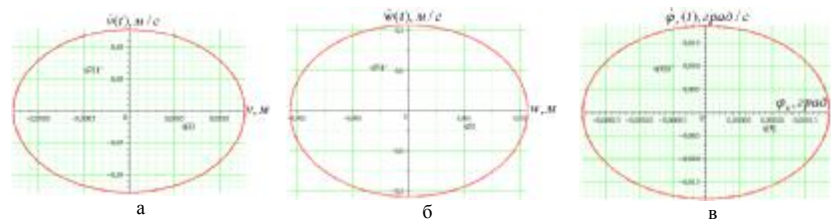


Рис. 5. Фазовые портреты движения центра масс вибробивной машины во времени: а –  $v$ , б –  $w$ , в –  $\varphi_x$

Для проверки достоверности выведенной выше математической модели проведен расчет аналогичной конструкции в специализированном программном комплексе CosmosMotion. Графики распределения искоемых величин, полученных при исследовании конструкции, представлены на рис. 7, 8. Сравнивая результаты аналитического и численного моделирования (рис. 3-4, 7-8), можно сделать вывод, что математическая модель при гармоническом нагружении построена довольно точно. В связи с этим все последующие выкладки будут производиться на предложенной выше математической модели (12).

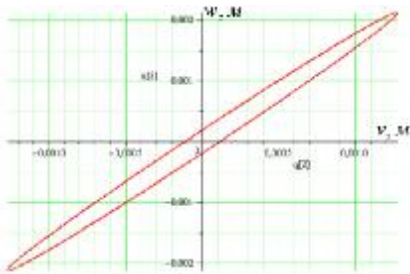


Рис. 6. Траектории движения центра масс на плоскости YOZ

При моделировании динамики исследуемой конструкции исследованы режимы вывода конструкции на рабочий режим, что сопровождается переходом вынуждающей гармонической нагрузки через резонансные частоты системы. На рис. 9-12 приведены графики распределения перемещений и ускорений, фазовые портреты и траектории движения точек в пространстве (для центра масс конструкции).

пространстве (для центра масс конструкции).

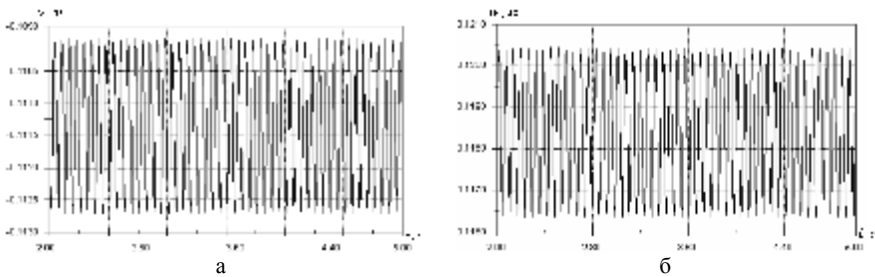


Рис. 7. Перемещения центра масс выбивной машины обобщенных координат во времени: а –  $v$ , б –  $w$

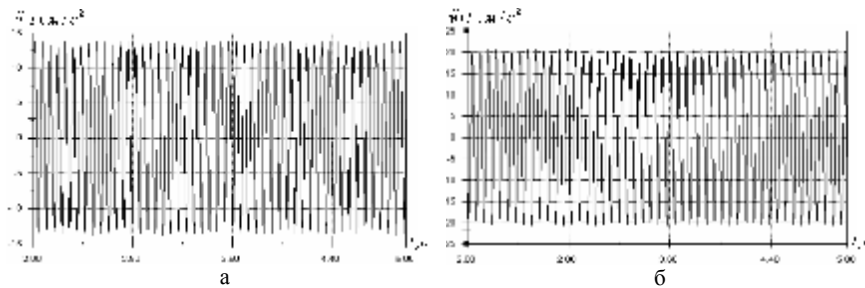
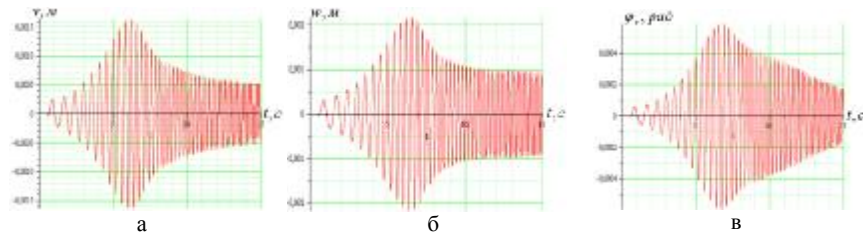


Рис. 8. Линейные ускорения центра масс выбивной машины обобщенных координат во времени: а –  $\ddot{v}(t)$ , б –  $\ddot{w}(t)$



а б в

Рис. 9. Перемещения (а, б) и вращение (в) центра масс выбивной машины во времени: а –  $v$ , б –  $w$ , в –  $\varphi_x$ .

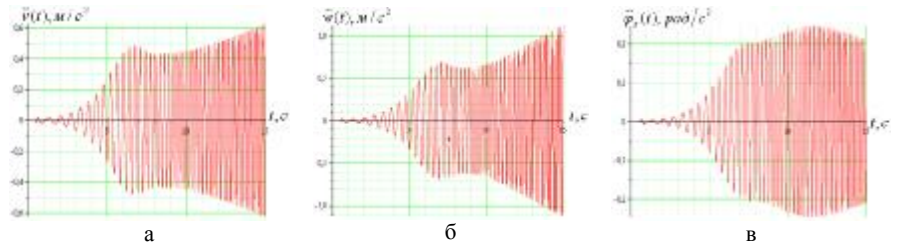


Рис. 10. Линейные,  $m/c^2$ , (а, б) и угловые,  $град/c^2$ , (в) ускорения центра масс выбивной машины во времени: а –  $\ddot{v}(t)$ , б –  $\ddot{w}(t)$ , в –  $\ddot{\varphi}_x(t)$

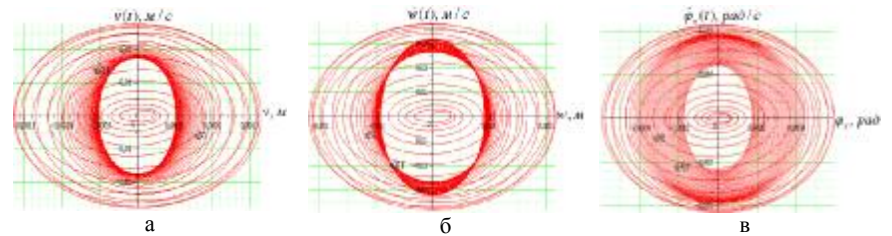


Рис. 11. Фазовые портреты движения центра масс во времени: а, б – перемещения в плоскости, в – поворот в плоскости

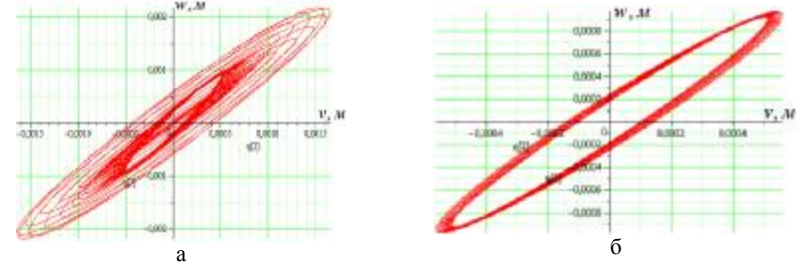


Рис. 12. Траектория движения центра масс в плоскости YOZ: а – расчетное время, б – квазиустановившийся режим

По полученным графикам виден переход через резонансный режим. Причем с заданными характеристиками системы [7] максимальная амплитуда в три раза превышает зарезонансную. По фазовым портретам движения можно наблюдать, что в начальный момент времени присутствуют переходные режимы, а далее колебания выходят на практически установившийся режим. Траектория движения точек машины в установившемся режиме – эллипс.

*Описание динамических характеристик системы от полезной вибро-*

ударной нагрузки „отливка – выбивная машина”. В литературе пока нет единого мнения относительно формализации описания внешнего воздействия в виде ударной нагрузки от воздействия песчано-глинистого кома с отливкой. Одни исследователи предлагают использовать эмпирические подходы, другие делают попытки описания внешнего воздействия, используя теорию удара. Однако во всех выкладках внешнее воздействие описывается приближенно.

Например, в работе [7] для определения ударной нагрузки автор предлагает провести предварительные экспериментальные исследования на опытной конструкции. Предлагается датчиками ускорений замерить отклик машины на нагрузку на несущих элементах выбивной машины и по полученным характеристикам составить функцию нагружения, а далее при поиске оптимальной конструкции использовать данные о нагружении, полученные уже на опытном образце. Однако в такой методике есть множество недостатков. Например, новая, усовершенствованная конструкция выбивной машины будет иметь отличные от предыдущей конструкции массово-инерционные характеристики. Также эксперимент проводится для определенного типа отливок, что не позволяет судить об ударных нагрузках для случая установки выбивной машины в линию, производящую другую продукцию. Нельзя судить об отклике по одному экспериментальному исследованию, для этого необходимо провести серию проходов отливки, после чего усреднить полученный результат, а потом составлять функцию нагрузки. Функция нагрузки должна иметь стохастический характер.

Что касается теории удара и методов, описанных для исследования вибромашин в работах [3, 4, 13], то следует отметить, что механические свойства кома существенно неоднородны, земляная смесь имеет существенно отличающиеся прочностные, вязкоупругие и жесткостные характеристики в зависимости от пропекания смеси, от температуры залитого металла, от влажности и т.д. К тому же отливка имеет сложную геометрию, которую достаточно сложно описать аналитически и выделить поверхности удара. Реализация такого метода является более сложной и более затратной по времени расчета. Поэтому при исследовании конструкции такими методами возникают значительные трудности.

Однако, несмотря на большое количество трудностей при проектировании подобных конструкций, такие машины проектируются и внедряются в производство. Поэтому при исследовании конструкций такого класса предлагается создавать параметрическое семейство математических подмоделей (см. рис. 1) и выбирать их в зависимости от класса задачи (выбор жесткости и вязкости опор выбивной машины, исследование динамики движения и выбивки в процессе работы, исследование необходимых характеристик песчано-глинистой смеси). Такой подход является наиболее оптимальным, поскольку при выборе рациональной структуры исследуемой конструкции в зависимости от класса задачи исследуется упрощенная модель, но учитывающая эффекты, присущие конкретному классу задачи.

*Пространственная модель при импульсном воздействии.* При исследовании конструкции по методике, предложенной в работе [7] при импульсном нагружении, предлагается ее доработать. Для этого будут учитываться все шесть степеней свободы, присущие абсолютно твердому телу. В расчетах импульсная нагрузка берется из экспериментальных исследований [14]. Математическая модель приведена выше (12). В результате расчетов по этой методике можно получить интересные характеристики в виде графиков и чисел.

На следующих графиках приводятся функция импульсного нагружения (рис. 13) и длительность импульса (рис. 14), полученные из экспериментальных данных. Траектория движения кома с отливкой приведена на рис. 15. При заданной функции нагружения можно получить графики различных характеристик, например, представленные на рис. 16-27.

Анализируя полученные данные, можно сделать вывод, что если отбросить выбросы от действия импульсной нагрузки на графиках (рис. 16, 17), то они практически совпадают с графиками (рис. 3, 4), что свидетельствует о достаточном соответствии полученных результатов. Импульсная нагрузка в данном случае считается вертикальной, соответственно она практически не оказывает влияния на остальные координаты. Сравнивая графики (рис. 6, 28), можно увидеть, что в случае добавления импульсного нагружения траектория движения в плоскости меняется с эллиптической на траекторию с впадиной от импульсного нагружения, что является вполне объяснимым с физической точки зрения.

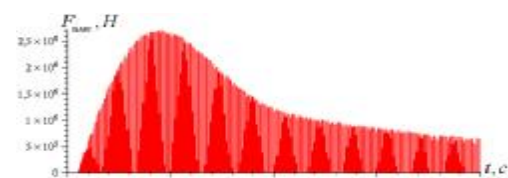


Рис. 13. Функция импульсного нагружения

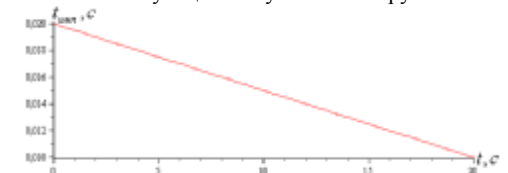
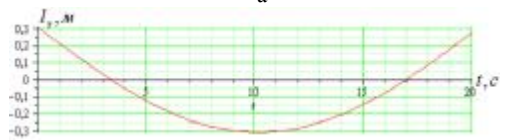


Рис. 14. Функция длительности импульса в зависимости от времени выбивки



а



б

Рис. 15. Траектория движения импульсной нагрузки во времени: а – в плоскости OY, б – в плоскости OX

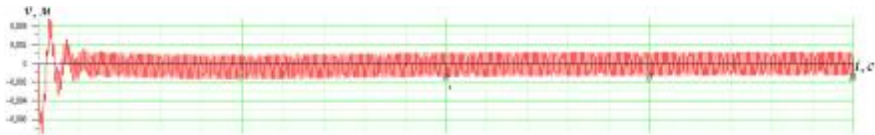


Рис. 16. Перемещения центра масс вдоль оси OY (см. рис. 2)

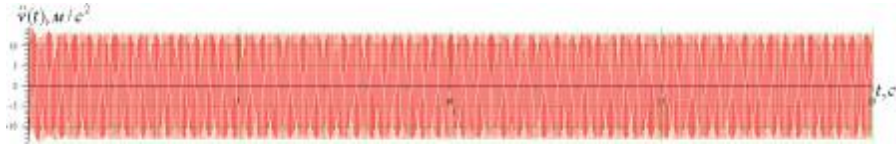


Рис. 17. Ускорения,  $m/c^2$ , центра масс вдоль оси OY (см. рис. 2)

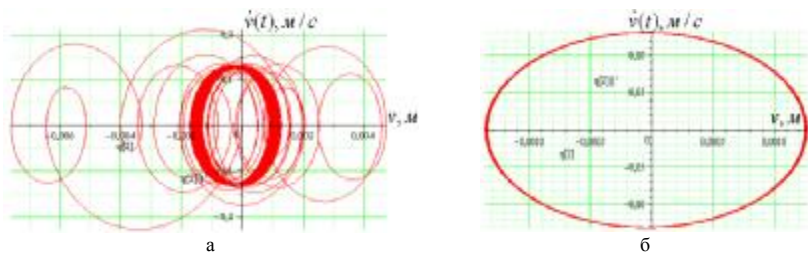


Рис. 18. Фазовый портрет (продольная координата  $v$ ) (см. рис. 2): а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

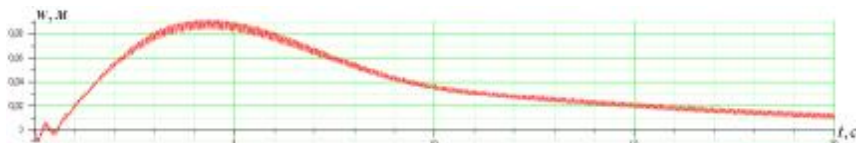


Рис. 19. Перемещения центра масс вдоль оси OZ (см. рис. 2)

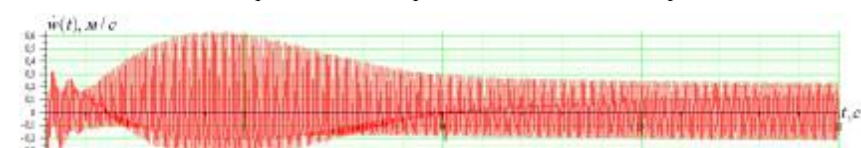


Рис. 20. Скорости центра масс вдоль оси OZ (см. рис. 2)

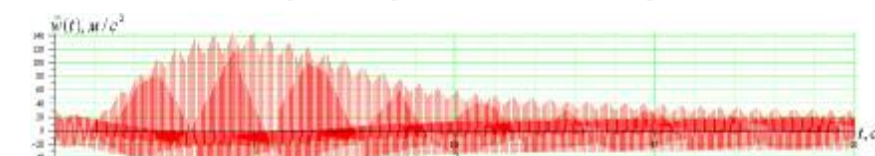


Рис. 21. Ускорения вдоль оси OZ (см. рис. 2)

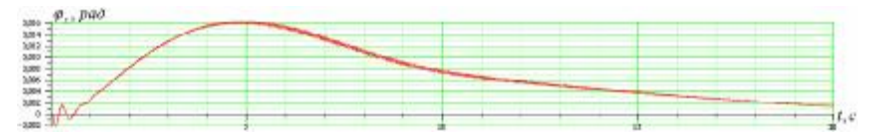


Рис. 22. Поворот центра масс  $\phi_x$  (см. рис. 2)

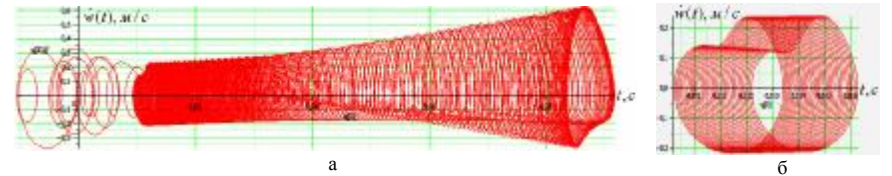


Рис. 23. Фазовый портрет (вертикальная координата  $w$ ) (см. рис. 2): а – расчетный временной интервал, б – квазиустановившийся режим

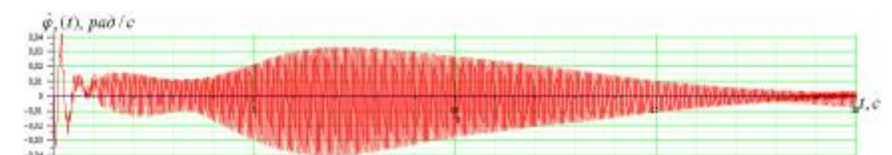


Рис. 24. Угловая скорость центра масс  $\dot{\phi}_x(t)$

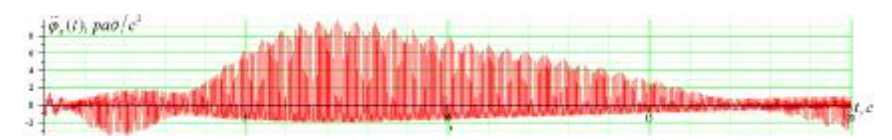


Рис. 25. Угловое ускорение центра масс  $\ddot{\phi}_x(t)$

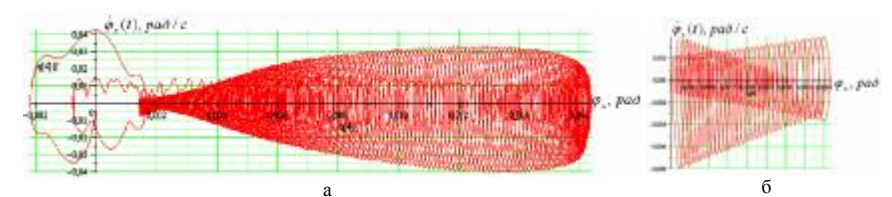


Рис. 26. Фазовый портрет (угловая координата  $\phi_x$ ): а – расчетный временной интервал, б – квазиустановившийся режим

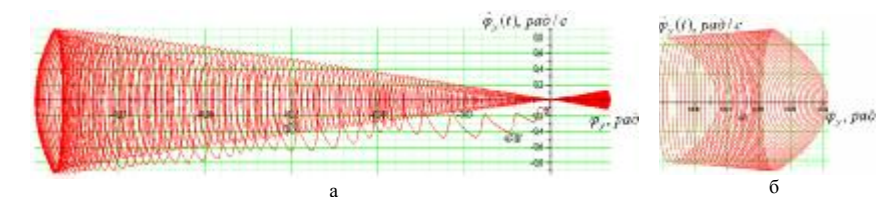


Рис. 27. Фазовый портрет (угловая координата  $\phi_y$ ): а – расчетный временной интервал, б – квазиустановившийся режим

*Разрешающие уравнения для виброударной системы.* При исследовании виброударных машин ближе всех к описанию ударного характера системы приблизились авторы в работах [3, 4, 13]. В данной статье предлагается математическая модель с большим количеством упрощений, однако модель описывает более существенные факторы, связанные со спецификой работы машины (на примере системы с 2-мя степенями свободы: вертикальные перемещения машины  $w$  и технологическую нагрузку  $w_k$ ):

$$\begin{cases} M \ddot{w}(t) + h_{\text{вн}} \dot{w}(t) + h_k (\dot{w}(t) - \dot{w}_k(t)) + h_k (w(t) - w_k(t)) |w(t) - w_k(t)| \times \\ \times \max_{t \rightarrow t_{\text{ycm}}} (w(t) - w_k(t)) * 10^3 + c_{\text{вн}} w(t) + c_k (w(t) - w_k(t)) + c_k (w(t) - w_k(t)) |w(t) - w_k(t)| \times \\ \times \max_{t \rightarrow t_{\text{ycm}}} (w(t) - w_k(t)) * 10^3 = A_0 \sin(\omega t) \cos(\alpha) + Mg; \\ m_k \ddot{w}_k(t) + h_k (\dot{w}_k(t) - \dot{w}(t)) + h_k (w_k(t) - w(t)) |w(t) - w_k(t)| \max_{t \rightarrow t_{\text{ycm}}} (w(t) - w_k(t)) * 10^3 + \\ + c_k (w_k(t) - w(t)) + c_k (w_k(t) - w(t)) |w(t) - w_k(t)| \max_{t \rightarrow t_{\text{ycm}}} (w(t) - w_k(t)) * 10^3 = m_k g. \end{cases} \quad (13)$$

В математической модели в выражениях для сил сопротивления присутствуют как линейные, так и квадратичные слагаемые, которые связаны с абсолютным значением расстояния между выбивной машиной и земляным комом. Т.о., жесткость упругой составляющей ударной силы зависит от модуля расстояния между выбивной машиной и комом (14), а демпфирование – от модуля разности скоростей (15):

$$C_k = \begin{cases} 0, & |w(t) - w_k(t)| > L \\ c_k, & |w(t) - w_k(t)| \leq L \end{cases}, \quad (14) \quad H_k = \begin{cases} 0, & |\dot{w}(t) - \dot{w}_k(t)| > L \\ h_k, & |\dot{w}(t) - \dot{w}_k(t)| \leq L, C_k \neq 0 \end{cases}. \quad (15)$$

Предлагается исследовать как линейную, так и нелинейную математические модели.

*Исследование линейной виброударной системы.* При исследовании динамики выбивной машины как линейной виброударной системы [15] предлагается провести серию расчетов с варьируемым весовым коэффициентом, стоящим при линейном слагаемом. Нелинейные слагаемые не учитываются.

На следующих графиках приведены результаты исследования для выбивной машины с базовыми характеристиками песчано-глинистой смеси. На рис. 29 представлены графики перемещения центра масс во времени выбивной машины и кома. На следующих рисунках приведены графики скоростей (рис. 30, 31) и ускорений (рис. 32, 33) центров масс выбивной машины и кома. На рис. 34, 35 приведены фазовые портреты движения для выбивной машины и кома. График силы ударного воздействия приведен на рис. 36.

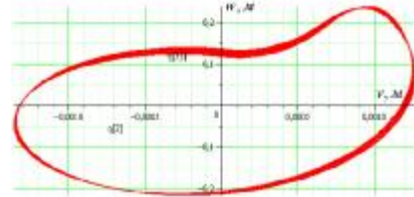


Рис. 28. Траектория движения центра масс в плоскости YOZ

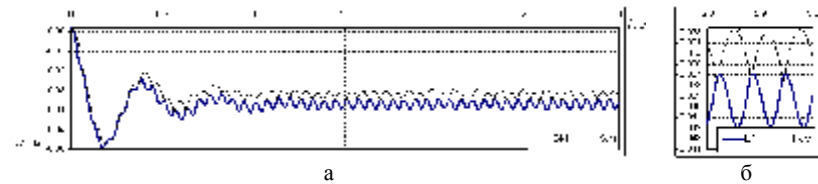


Рис. 29. Изменение перемещений центров масс во времени: а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

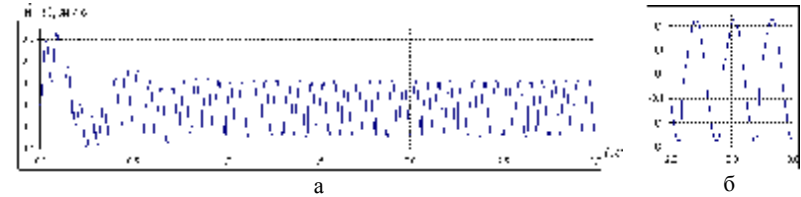


Рис. 30. Изменение скорости центра масс выбивной машины во времени: а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

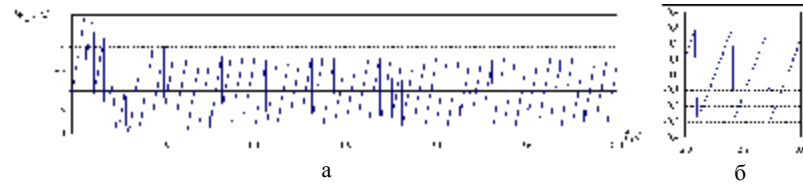


Рис. 31. Изменение скорости центра масс кома во времени: а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

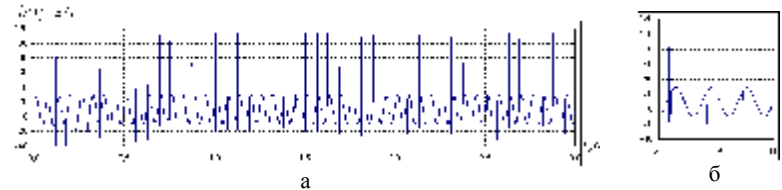


Рис. 32. Изменение ускорений центра масс выбивной машины во времени: а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

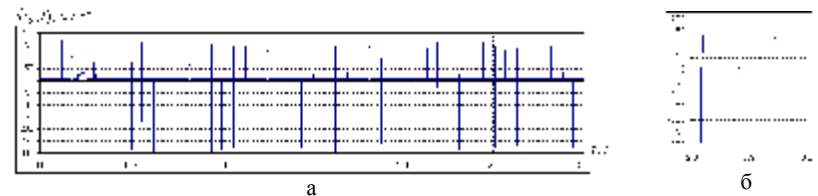


Рис. 33. Изменение ускорений центра масс кома во времени: а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим



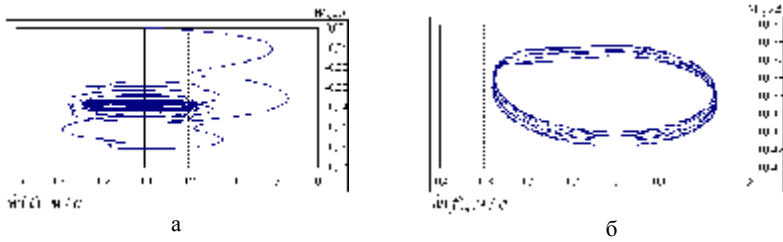


Рис. 34. Фазовый портрет движения центра масс выбивной машины:  
а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

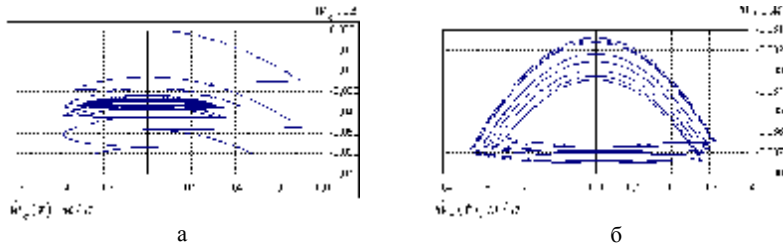


Рис. 35. Фазовый портрет движения центра масс кома:  
а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим.

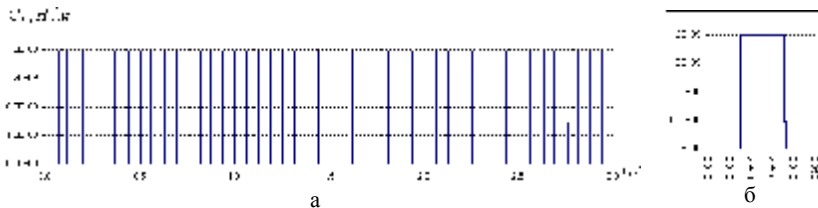


Рис. 36. График ударного воздействия:  
а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что результаты совпадают с приведенными выше, а также с полученными с использованием других математических моделей. При этом нужно отметить, что в линейной постановке решение получается более приближенным, поскольку не учитывается эффект уплотнения земляной смеси, характеристики вязкости и упругости включаются резко, что сказывается на поведении виброударной системы. Для получения более достоверного результата необходимо исследовать систему с присутствующими в ней нелинейными процессами.

*Исследование нелинейной виброударной системы.* При введении нелинейных слагаемых в математическую модель удается в большем диапазоне варьировать различными параметрами исследуемой системы, можно включать характеристики смеси без резких скачков. В результате исследования нелинейной виброударной системы получают уточненные характеристики

динамической системы. На следующих рисунках представлены результаты перемещений (рис. 37), ускорений (рис. 38), фазовые портреты (рис. 39) центра масс во времени и усилия реакций от различных слагаемых (рис. 40, 41).

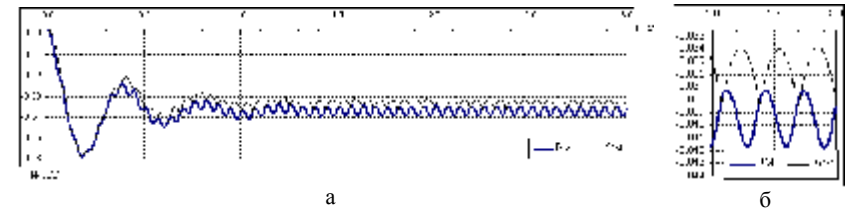


Рис. 37. Изменение перемещений центров масс во времени:  
а – расчетный временной интервал, б – установившийся режим

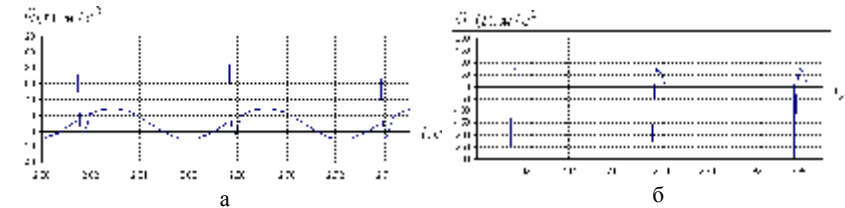


Рис. 38. Изменение ускорений центров масс выбивной машины (а) и кома (б) во времени на установившемся режиме

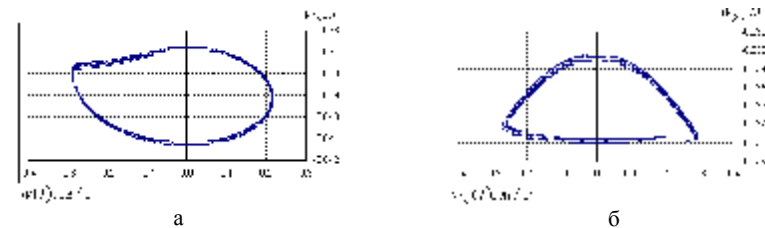


Рис. 39. Фазовые портреты движения центров масс выбивной машины (а) и кома (б) во времени на установившемся режиме

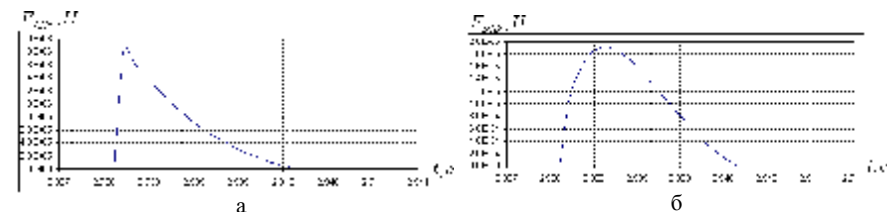


Рис. 40. Линейная (а) и нелинейная (б) реакции от вязкого демпфирования:  
а –  $h_v(\dot{w}(t) - \dot{w}(t))$ , б –  $h_v(\dot{w}(t) - \dot{w}(t))w(t) - w(t) \max(w(t) - w(t)) * 10^3$

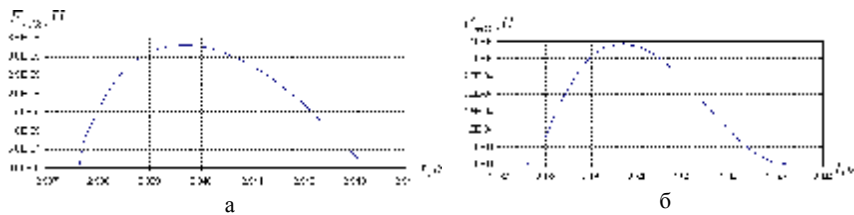


Рис. 41. Линейная (а) и нелинейная (б) реакции от сил упругости:  
 а –  $C_k(w_k(t) - w(t))$ , б –  $C_k(w_k(t) - w(t))w(t) - w_k(t) \max(w(t) - w_k(t)) \cdot 10^3$

Анализ приведенных результатов для виброударной системы. Предложенные математические модели позволяют исследовать динамические свойства в зависимости от параметров песчано-глинистой смеси виброударной системы „выбивная машина – технологическая нагрузка”.

По приведенным выше соотношениям (18) можно решать не только прямую задачу (отыскание характеристик динамической системы при заданных механических характеристиках смеси), но и обратную (по заданному закону движения системы находить необходимые механические характеристики). В качестве примера решения такой задачи предлагается исследовать линейную виброударную систему. При решении обратной задачи в данном случае варьируемым параметром выступает модуль упругости кома. Предлагается варьировать характеристики кома от  $0.1 \cdot C_k$  до  $10 \cdot C_k$ .

При решении поставленной задачи были получены характеристики длительности удара в зависимости от жесткости кома (рис. 42), а также амплитуды размаха перемещений, скоростей и ускорений (рис. 43-47).

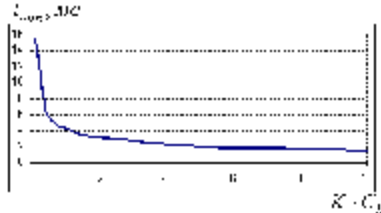


Рис. 42. Длительность удара центра масс на установившемся режиме

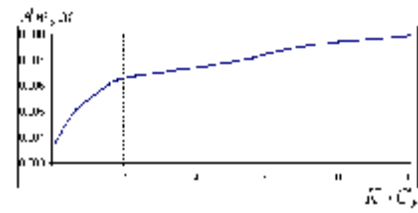


Рис. 43. Амплитуда перемещений центра масс выбивной машины на установившемся режиме

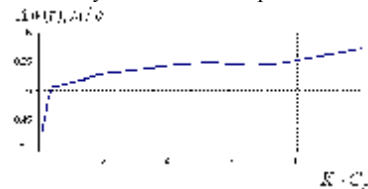


Рис. 44. Амплитуда скорости центра масс выбивной машины на установившемся режиме

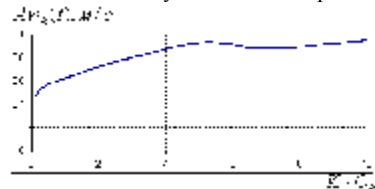


Рис. 45. Амплитуда скорости центра масс кома на установившемся режиме

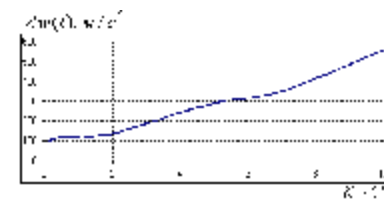


Рис. 46. Амплитуда ускорений центра масс выбивной машины на установившемся режиме

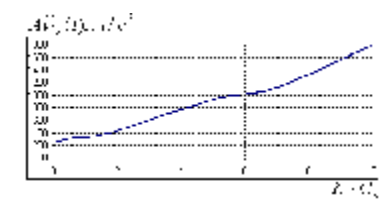


Рис. 47. Амплитуда ускорений центра масс кома на установившемся режиме

Из полученных результатов можно, например, определить необходимый коэффициент упругости кома, при котором длительность импульса будет совпадать с экспериментальной ( $t_{имп} \approx 10$  мс).

**Выводы и направление дальнейших исследований.** В статье предложена методика исследования вибрационных машин, в основу которой положено многоуровневое семейство моделей. Приведены расчеты с использованием моделей динамики различных уровней, которые предлагается использовать для разных типов анализа. Проведена верификация полученных результатов на всех этапах исследования инерционной выбивной машины. Результаты сравнивались при различных постановках, а результаты при холостом режиме сравнивались с полученными в универсальном программном модуле CosmosMotion. Приведены результаты синтеза для линейной системы. Предложенная схема позволяет объединить и развить модели и подходы, предложенные различными авторами [1-15].

В дальнейшем планируется развить идею многоуровневых моделей, распространить ее на другие типы анализа. Это позволит описать полный цикл исследований при проектировании виброударных машин, объединив все типы анализа в одном специализированном программном модуле.

**Список литературы:** 1. Горский А.И. Расчет машин и механизмов автоматической линии литейного производства. – М.: Машиностроение, 1978. – 551с. 2. Сердюк Л.И. Основы теории, расчёт и конструирование управляемых вибрационных машин с дебалансными возбудителями. Дис. д-ра техн. наук: 05.02.02:01.02.06 / Харьковский политехнический институт. – Х: 1991. 3. Герсга И.И. Совершенствование конструкций и методов расчёта вибрационных машин. Дис. канд. техн. наук: 01.02.06 / Львовский политехнический институт. – Л: 1991. 4. Нисонский В.П., Герсга И.И., Козулькевич Р.М., Гуцуляк Ю.В. Математическая модель многосекционных выбивных агрегатов с учётом рассеяния энергии // Проблемы прочности. – 1994. – № 10. – С.30-36. 5. Латиш Е.С. Развитие вибрационного грохочения на основе усовершенствования модельных явлений кинетики процесса. Дис. д-ра. техн. наук: 05.15.11 / Институт геологической механики им. М.С. Полякова. – Днепропетровск. – 2006. 6. Яковенко В.Б., Моделирование динамики вибрационных систем. Дис. д-ра. техн. наук: 01.02.06 / Киевский политехнический институт. – Киев. 1993. 7. Барчан Е.Н. Удосконалення методів розрахунку та конструції вибивної транспортувальної машини для формувальних ліній крупного литва. Дис. канд. техн. наук: 05.02.02. / Гол. спеціаліз. конструктор.-технол. ін-т. – Маріуполь, 2008. – 22 с. 8. Сердюк Л.И. Динамика вибрационной установки с управляемым приводом // Изв. вузов. Машиностроение. – 1991. – № 10. – С.14–18. 9. Ярошевич Т, Тимошук В., Силивонюк А. Дослідження процесу розбігу вібраційної машини з дебалансним приводом / Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій. Праці конференції. – Львів: КІНПАТРИ ЛПД. – 2008. – С. 131-132. 10. Дятчин В.З. Обґрунтування параметрів вібраційного живильника грохота з просторовими коливаннями короба. Дис. канд. техн. наук:

05.05.06 / Національний гірничий університет. – Дніпропетровськ. – 2004. **11.** *Ленда В.О.* Вибрационные системы с комбинированным режимом динамического нагружения для энергосберегающих технологий переработки минерального сырья. Дис. д-ра. техн. наук: 05.05.06 / Институт геологической механики им. М.С. Полякова. – Днепропетровск. – 2006. **12.** *Латишин Е.С.* Развитие вибрационного грохочения на основе усовершенствования модельных явлений кинетики процесса. Дис. д-ра. техн. наук: 05.15.11 / Институт геологической механики им. М.С. Полякова. – Днепропетровск. – 2006. **13.** Гергега И.И. Взаимодействие рабочей нагрузки с рабочим органом в ударно-вибрационных машинах. // Проблемы прочности. – 1995. – № 4. – С.74-82. **14.** *Барчан Е.Н., Ткачук Н.А., Грабовский А.В.* Экспериментальное исследование динамических процессов в выбивной машине с дебалансным приводом // Вісник НТУ “ХПІ”. Тем. вип.: „Машинознавство та САПР”. – 2007. – №3. – С.17-23. **15.** *Вибрации в технике: Справочник.* В 6-ти т./ Под ред. Лавендева Э.Э. Т. 4: Вибрационные процессы и машины. – М: Машиностроение, 1981. – 510 с.

Поступила в редакцию 19.03.2009

УДК 621.01

**В.Б. ЗЕЛЕНСКИЙ**, канд. техн. наук, доц. каф. ТММиСАПР,  
**А.А. ЗАРУБИНА**, канд. техн. наук, проф. каф. ТММиСАПР,  
**И.Я. ХРАМЦОВА**, научн. сотр. каф. ТММиСАПР,  
**З.С. САФОНОВА**, доц. каф. ТММиСАПР НТУ „ХПИ”

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ХОДЬБЫ С ПРОТЕЗОМ НА ФАЗЕ ПЕРЕНОСА

*Розглянуто динамічну модель ходи на протезі, яка містить пружні елементи, що дозволяють акумулювати енергію на одних фазах руху та віддавати її на інших. Модель складено як незамкнутий кінематичний ланцюг, для якого запропонований алгоритм автоматизованої побудови рівнянь Лагранжа другого роду у матричній формі. Використання запропонованого алгоритму дозволить обирати оптимальні параметри протезу із урахуванням антропометричних вимог індивіда.*

*The dynamic model of ambulation on prosthetic appliance, which contains resilient elements allowing to accumulate energy at one phases of motion and give it at other phases, is considered. A model is made as kinematics chain for which the algorithm of the automated construction of Lagrangian equations of second type in matrix form is offered. The use of the offered algorithm will allow to change optimum parameters of prosthetic appliance with the account of anthropometric requirements of individual.*

**Постановка задачи.** Рассмотрим сначала динамическую модель ходьбы с протезом нижней конечности без упругих элементов с продольной жесткостью в бедре (т. е. при отсутствии в кинематической схеме кинематических пар поступательного типа). Динамическая модель ходьбы с протезом нижней конечности при учете движений отдельных частей тела человека (стопы, голени, бедра, корпуса) на фазе переноса структурно соответствует модели манипулятора, представленного открытой (незамкнутой) кинематической цепью звеньев (см. рис. 1). Шарниры  $O_3$  и  $O_4$  соединяют различные пары звеньев и показаны на рис. 1 раздельно; на самом деле они совпадают, так как рассматривается плоская модель.

Динамический анализ такой цепи с большим количеством звеньев ( $n=7$ ) отличается значительной сложностью и громоздкостью уравнений движения. Поэтому здесь целесообразно использовать методы автоматизированного построения уравнений динамики на ЭВМ. В частности, достаточно удобным является составление уравнений Лагранжа II рода в матричной форме.

Пусть  $R_i = [x_i, y_i, z_i, 1]^T$  – вектор, определяющий положение произвольной точки звена  $i$  в системе отсчета, жестко связанной с этим звеном. Так как нами рассматривается плоская задача, то  $R_i = [x_i, y_i, z_i, 1]^T$ . Если матрица перехода от системы координат  $(i-1)$ -го звена к системе  $i$ -го звена есть  $A_i (3 \times 3)$ , то можно связать радиусы и векторы одной и той же точки в системах  $i$  и  $i-1$ :

$$R_{i-1} = A_i R_i. \quad (1)$$

Матрицы перехода  $A_i$  для звеньев 1, 2, ..., 5 и 7 имеют одинаковый вид (2). Структура матрицы звена 6 будет показано ниже.

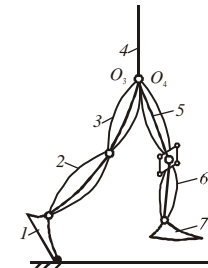


Рис. 1. Динамическая модель ходьбы с протезом нижней конечности

Пусть  $a_i$  – длина  $i$ -го звена (расстояние между шарнирами);  $x_i^*, y_i^*$  – координаты центра тяжести  $i$ -го звена в собственной системе координат;  $m_i$  – масса звена;  $I_{xx}^{(i)}, I_{yy}^{(i)}, I_{xy}^{(i)}, I_{yx}^{(i)}$  – элементы тензора инерции, вычисляемые для  $i$ -го звена относительно собственных осей.

Матрица перехода  $A_i (i = 1, 2, \dots, 5; 7)$  имеет вид:

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & a_i \cos q_i \\ \sin q_i & \cos q_i & a_i \sin q_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Введем матрицы преобразования

$$T_{il} = A_{i+1} A_{i+2} \dots A_l; \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad l = 0, 1, \dots, 7; \quad i < l. \quad (3)$$

Отдельно обозначим

$$T_{0n} = T. \quad (4)$$

Матрицей инерции называется матрица

$$H_i = \begin{bmatrix} I_{xx}^{(1)} & I_{xy}^{(1)} & m_i x_i^* \\ I_{yx}^{(1)} & I_{yy}^{(1)} & m_i y_i^* \\ m_i x_i^* & m_i y_i^* & m_i \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Рассмотрим величины  $T_{0i}^{\mathcal{R}}$  и  $\frac{\partial T_{0i}^{\mathcal{R}}}{\partial q_k}$ .